第九章习题

9.1 满足条件：

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ \big(|x|<\eta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\big)$$

的函数 $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是怎样的？

9.2 确定以下极限：

1) $x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$ 当 $x\to+\infty$

2) $x \longmapsto \sqrt{x^2+2x}-x$ 当 $x\to+\infty$

3) $x \longmapsto \dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$ 当 $x\to 0$

4) $x \longmapsto \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^{x}+e^{-x}}$ 当 $x\to+\infty$

5) $x \longmapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\ln x}$ 当 $x\to 0^+$.

9.3 给出在 $+\infty$ 处有极限的周期函数.

9.4 在 $\mathbb{R}^+$ 如下定义函数 f：

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } f \text{ 是整数}\\ 0 & \text{其它情形}\end{cases}$$

证明：对于 $x>1$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx)=0$

函数 f 在 $x\to+\infty$ 时有极限吗？

9.5 设 $f: I\to\mathbb{R}$ 为函数. 证明以下论断的等价性.

(i) 对于任意取值于 I 的以 a 为极限的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，序列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 有有限或无限的极限

(ii) 函数 f 在 a 处有有限或者无限的极限.

9.6 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实函数，在 0 处连续，且满足

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

证明：$f(x)$ 是常值函数。

9.7 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一连续函数，满足：

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

令 $\alpha = f(1)$.

1) 依次地对 $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ 和 $x \in \mathbb{Q}$，把 $f(x)$ 表示成 x 和 α 的函数

2). 确定函数 $f(x)$.

9.8 设 $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+$

1) 证明：对于所有 $n \in \mathbb{N}^*$，$\exists\, p_n \in [\![1, n]\!]$ 和 $q_n \in \mathbb{Z}$ 使得 $|p_n \alpha + q_n| < \frac{1}{n}$. 可以考察 $\alpha_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$. 其中 $k \in [\![0, n]\!]$

2) 证明：同时为 1-周期和 α-周期的连续函数为常数.

9.9 1) 证明唯一存在 $\mathbb{R}$ 上的 1-周期实函数 使得

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\quad f(x) = |x|$$

2) 证明 f 是连续的.

9.10 设 $f: I \to I$ 为一减函数，且序列 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 如下定义：$u_0 \in I$，$u_{n+1} = f(u_n)$

1) 证明 $f \circ f$ 是增的

2) 推出序列 $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ 和 $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ 单调，进而证其有相反的单调性

3) 研究如下定义的序列 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$：$u_0 \in [0, 1]$，$u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

9.11 研究如下定义的序列

1) $u_0\in\mathbb{R}_+$, 和 $u_{n+1}=\tanh(u_n)$

2) $u_0\in\mathbb{R}_+^*$ 和 $u_{n+1}=\sinh(u_n)$

9.12 给出一个连续函数 $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$，使得：

$$f([0,+\infty[)=]-1,1[.$$

我们希望用连续函数构造这个例子.

9.13 设 a, b 为实数且 $a\leq b$. 又设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为连续函数. 证明 f 有一个不动点.

9.15 确定连续函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足 $f\circ f=f$.

可以从确定 $f|_{f([0,1])}$ 开始.

9.14 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一连续函数使得 $\lim_{-\infty}f=\lim_{+\infty}f=+\infty$.

证明：f 有下界且其下确界是可取到的.

9.16 设 f 和 g 是 $[0,1]$ 上两个实连续函数. 对任意实数 x 令

$$\varphi(x)=\sup_{t\in[0,1]}\left(f(t)+xg(t)\right)$$

证明：φ 是 Lipschitz 的.

9.17 设 $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ 递增，使得 $g:x\longmapsto\frac{f(x)}{x}$ 递减.

证明：f 连续.

9.18 给出从$[0,1]$到其自身的一个映射，使得该映射在任意一点处都不连续。

9.19 证明：实直线$\mathbb{R}$上的连续周期函数是一致连续的。

9.20 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是一个一致连续函数。

证明：存在$(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$使得：$\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|\leqslant a|x|+b$